

# 多チャネル音響信号処理

第7回 信号処理特論 / 音楽音声信号処理特論

---

山岡洸瑛

東京大学 大学院情報理工学系研究科  
システム情報学専攻 猿渡・齋藤研究室 助教

# 講義予定

---

- 04/09: 第 1 回 統計的音声音響信号処理概論
- 04/16: 第 2 回 非負値行列因子分解
- 04/23: 第 3 回 ブラインド音源分離その 1
- 04/30: 第 4 回 ブラインド音源分離その 2
- 05/14: 第 5 回 エンハンスメント・高次統計量解析とその応用
- 05/21: 第 6 回 【レポート課題 1】
- 05/28: 第 7 回 多チャネル音響信号処理
- 06/04: 第 8 回 音楽情報処理
- 06/11: 第 9 回 環境音合成・認識
- 06/18: 第 10 回 音声合成・変換
- 06/25: 第 11 回 【レポート課題 2】

# 後半の講義に関するレポート課題

---

- 後半の講義（第7回の山岡，第8-10回の中村先生，岡本先生，齋藤先生の講義が対象）に関連する国際会議論文を3編選び，それぞれの概要を各論文につきスライド3枚程度にまとめよ。
- 国際会議論文は過去5年以内に音声音響信号処理分野のトップカンファレンス（ICASSP, INTERSPEECH など）で発表されたものとする。
- 提出はPDF形式とする．表紙にはタイトル（信号処理特論 / 音楽音声信号処理特論 レポート）・専攻名・学年・学生証番号・名前を記載せよ。
- 提出期限および回収方法は第10回の講義で指定する。

# 自己紹介

---

- 名前: 山岡 洸瑛

Email: kouei\_yamaoka@ipc.i.u-tokyo.ac.jp

- 経歴

- 2019 年: 筑波大学 大学院システム情報工学研究科 修士 (工学)
- 2024 年: 東京都立大学大学院システムデザイン研究科 博士 (情報科学)
- 2024 年–現在: 猿渡・齋藤研究室 助教

- 専門

- 多チャネル音響信号処理, 分散マイクロフォンアレイ  
ビームフォーミング, 時間差推定



# 本講義のアウトライン

---

- 多チャネル音響信号処理の概要
  - はじめに
  - 多チャネル音響信号処理のタスク
  - 多チャネル音響信号処理の物理
- 時間差推定
  - 時間差推定の概要
  - 相互相関関数に基づく時間差推定
  - 補助関数法に基づく時間差推定（提案法）
- おわりに
  - 提案法の応用例
  - まとめ

# 多チャンネル音響信号処理の概要

---

# 信号処理とは

---

- “A branch of electrical engineering which pulls meaning from the broad sources of data all around us”
  - IEEE Signal Processing Society の HP より引用
  - What is Signal Processing? (<https://signalprocessingsociety.org/our-story/signal-processing-101>)
  - YouTube: <https://www.youtube.com/watch?v=R90ciUoxcJU>
- 物理的な出来事を 1. モデル化し, 2. 分析する学問
  - 対象: 音響, 画像, 電気, 生体, など
  - 応用: コンピュータ, テレビ, 電話など

# 多チャンネル音響信号処理とは

- Microphone Array Signal Processing
  - 複数のセンサで観測された音信号を対象とした信号処理
  - 観測信号が有する音の空間的な情報を活用



RWCP-SSD [S.Nakamura+,  
2002] より引用



Meeting Owl [meetingowl.jp]  
より引用



Sony ICD-SX813

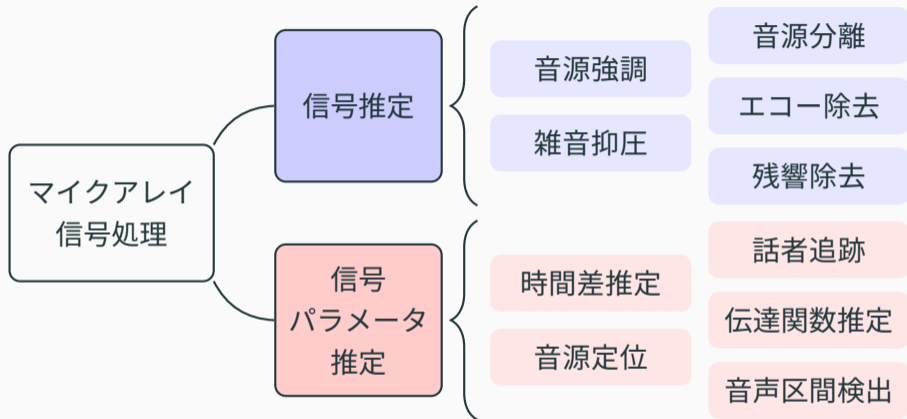
# 多チャンネル音響信号処理の実応用例



Meeting Owl [meetingowl.jp] より引用  
8ch マイクアレイを搭載

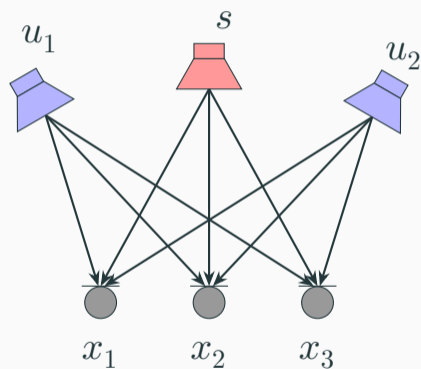
- アレイ信号処理の目的: 信号強調や方向推定などの様々な聴覚機能について, その拡張および計算機上での実現

# アレイ信号処理におけるタスクの分類



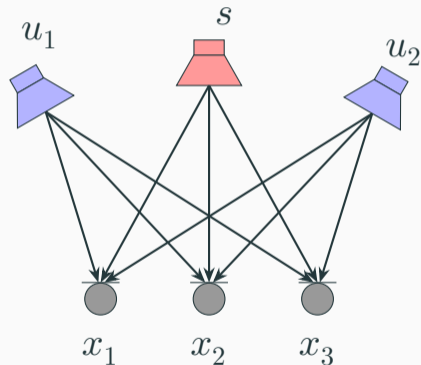
# 信号推定の例

- 音源強調 [J. Benesty+, 2005], [S. Makino, 2018]
  - 雑音が重畳した観測信号について，雑音を抑圧し，目的音を強調・抽出する技術
  - 目的音が音声の場合は，音声強調
  - 各音源を抽出する場合は，音源分離
- 応用例
  - ロボット聴覚
  - 音声認識や音声変換の前処理
  - 音質や通話品質の改善
  - 補聴器など医療サポート



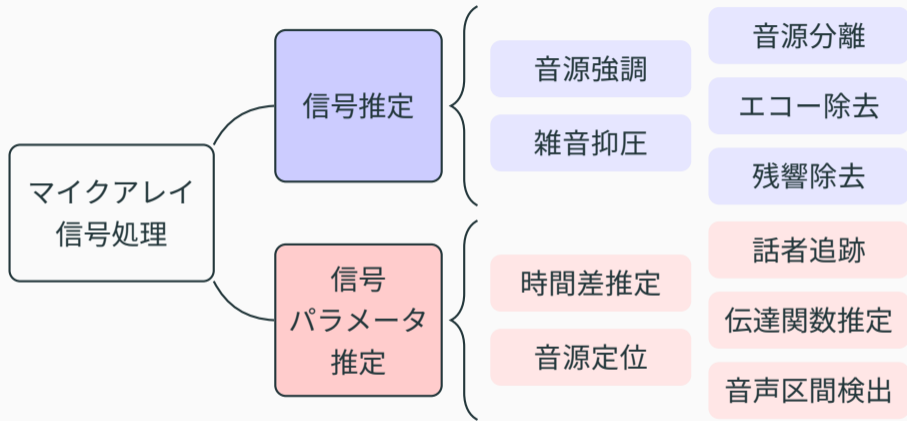
# 信号パラメータ推定の例

- 音源定位 [H. L. Van Trees, 2002], [E. Vincent+, 2018]
  - 観測信号について, (複数の) 音源が到来した方向を推定する技術
  - 到来方向や3次元座標の推定がある
  - 音源が移動する場合は, 音源追跡
- 応用例
  - ロボット聴覚
  - 音に基づく監視システム
  - 自動運転
  - 音源強調との連携





# アレイ信号処理におけるタスクの分類



- 本講義の内容: パラメータ推定の基礎である, 時間差推定アルゴリズムの紹介

# アレイ信号処理における物理モデル

---

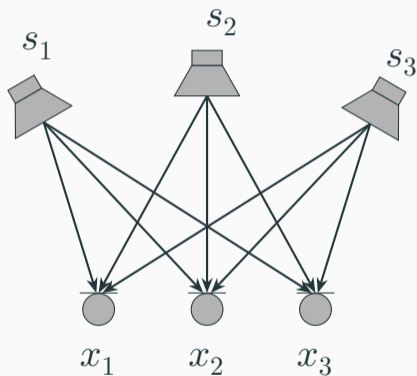
# アレイ信号処理における物理モデル（の準備）

- 想定する状況

- 音源信号:  $\check{s}_q(\tilde{t})$   
(音源インデックス  $q = 1, \dots, Q$ )
- 観測信号:  $x_m(\tilde{t})$   
(マイクインデックス  $m = 1, \dots, M$ )
- $\tilde{t}$ : 連続の時間変数

- 仮定

- マイクは無指向性
- マイクやスピーカーは線形に動作
- マイクやスピーカーは移動しない



# 球面波モデル

---

- 音波
  - 弾性体を介して（空中を）伝搬する波
  - 大気圧約 1013 hPa ，通常聞く音は 20  $\mu$ Pa から 20 Pa 程度（100 万倍！）

# 球面波モデル

- 音波

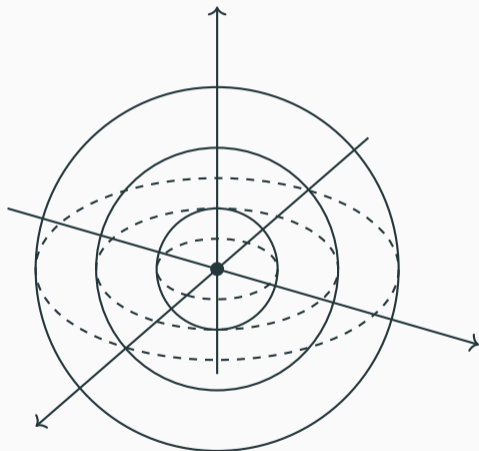
- 弾性体を介して（空中を）伝搬する波
- 大気圧約 1013 hPa ，通常聞く音は 20  $\mu$ Pa から 20 Pa 程度（100 万倍！）

- 自由音場 (*free field*) [S. Gannot+, 2018] における音の到来モデル

- 球面波 (*spherical wave*): 点音源から放射される音波で，同心球状に伝搬

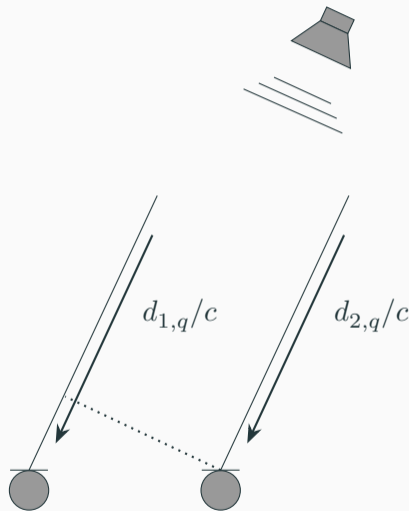
- $$s_{m,q}(\tilde{t}) = \frac{1}{\sqrt{4\pi d_{m,q}}} \check{s}_q \left( \tilde{t} - \frac{d_{m,q}}{c} \right)$$

- $d_{m,q}$ :  $m, q$  間の距離,  $c$ : 音速



# 平面波モデル

- 遠方場 (*far field*)  
における音の到来モデル
  - 平面波 (*plane wave*): 十分離れた点音源から放射される音波で、波面が平行に進行
  - 信号減衰  $1/\sqrt{4\pi d_{m,q}}$  は等しいと仮定 (ここでは  $\alpha$ )
  - $s_{m,q}(\tilde{t}) = \alpha \check{s}_q \left( \tilde{t} - \frac{d_{m,q}}{c} \right)$



# インパルス応答を用いた表現

- デジタル信号処理の観点からは、畳み込みで記述される

$$\underline{\mathbf{x}}(t) = \sum_{q=1}^Q \mathbf{s}_q(t), \quad \underline{\mathbf{s}}_q(t) = \sum_{\tau} \mathbf{h}_q(\tau) \underline{\check{\mathbf{s}}}_q(t - \tau)$$

多チャンネル観測                      ソースイメージ                      音源信号

- $t$ : 離散時間インデックス
- $\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \cdots x_M(t)]^T$ ,  $\mathbf{s}_q(t) = [s_{1,q}(t) \cdots s_{M,q}(t)]^T$
- 音響インパルス応答 (*acoustic impulse responses*)
  - $\mathbf{h}_q(t) = [h_{1,q}(t) \cdots h_{M,q}(t)]^T$
  - 直接音だけでなく反響も表現

# 周波数領域における表現

- 短時間フーリエ変換 (short-time Fourier transform; STFT) 領域では

$$\mathbf{x}(k, n) = \sum_{q=1}^Q \mathbf{s}_q(k, n), \quad \mathbf{s}_q(k, n) = \mathbf{h}_q(k) \check{s}_q(k, n)$$

- $k, n$ : 周波数および時間フレームインデックス
  - $\mathbf{s}_q(k, n), \check{s}_q(k, n)$ :  $\mathbf{s}_q(t), \check{s}_q(t)$  の STFT 表現
  - STFT のフレーム長が十分に長いと仮定 (Narrowband approximation)
- 音響伝達関数 (acoustic transfer function; ATF)
  - $\mathbf{h}_q(k) = [h_{1,q}(k) \cdots h_{M,q}(k)]^T$
  - 近似を含むが、音の観測をシンプルな物理モデルで表現
  - 線形時不変システムを仮定し、広く用いられる



# ATF の具体例

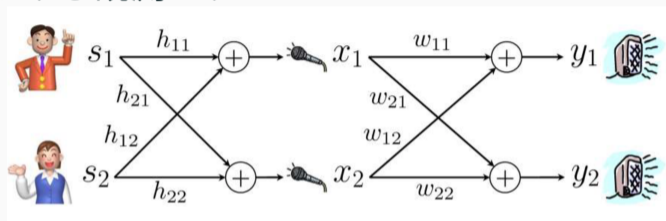
- ステアリングベクトル (*steering vector*)
  - 無残響を仮定すると, ATF は以下で表現できる
  - $\omega_k = 2\pi \frac{k}{K}$ ,  $f_s$ : サンプリング周波数

$$\tilde{\mathbf{h}}_q^s(k) = \left[ \frac{1}{\sqrt{4\pi d_{1,q}}} e^{-j\omega_k \frac{d_{1,q}}{c} f_s} \dots \frac{1}{\sqrt{4\pi d_{M,q}}} e^{-j\omega_k \frac{d_{M,q}}{c} f_s} \right]^T \quad (\text{球面波の場合})$$

$$\tilde{\mathbf{h}}_q^p(k) = \alpha \left[ e^{-j\omega_k \frac{d_{1,q}}{c} f_s} \dots e^{-j\omega_k \frac{d_{M,q}}{c} f_s} \right]^T \quad (\text{平面波の場合})$$

# 参考: 音源分離では

- 音源分離における観測モデル



第 3,4 回の講義資料から引用

$$\begin{pmatrix} x_1(k, n) \\ \vdots \\ x_M(k, n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{1,1}(k) & \cdots & h_{1,Q}(k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{M,1}(k) & \cdots & h_{M,Q}(k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1(k, n) \\ \vdots \\ s_Q(k, n) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}(k, n) = \mathbf{H}(k) \mathbf{s}_{kn}(k, n)$$

# 相対伝達関数 (*relative transfer function; RTF*)

---

- ATF の問題点: 振幅と位相の任意性
  - 適当な変数  $a, \tau$  を用いて

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_q(k) \check{s}_q(k, n) &= (ae^{-j\omega_k \tau}) \mathbf{h}_q(k) \frac{\check{s}_q(k, n)}{ae^{-j\omega_k \tau}} \\ &= \mathbf{h}'_q(k) \check{s}'_q(k, n) \end{aligned}$$

# 相対伝達関数 (*relative transfer function; RTF*)

- ATF の問題点: 振幅と位相の任意性
  - 適当な変数  $a, \tau$  を用いて

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_q(k) \check{s}_q(k, n) &= (ae^{-j\omega_k \tau}) \mathbf{h}_q(k) \frac{\check{s}_q(k, n)}{ae^{-j\omega_k \tau}} \\ &= \mathbf{h}'_q(k) \check{s}'_q(k, n) \end{aligned}$$

- あるソースイメージを説明する ATF と音源信号の組が無数に存在
  - 観測信号のみからは音源信号は推定できない
    - 推定できるのはソースイメージ
- (cf. ブラインド音源分離におけるプロジェクションバック)

- RTF の定義 [S. Doclo+, 2015]
  - $r$ : 参照マイクのインデックス
  - 参照マイクからみた相対的な伝達関数

$$\mathbf{a}_q(k) \triangleq \frac{1}{h_{r,q}(k)} \mathbf{h}_q(k)$$

- RTF に基づく観測モデル

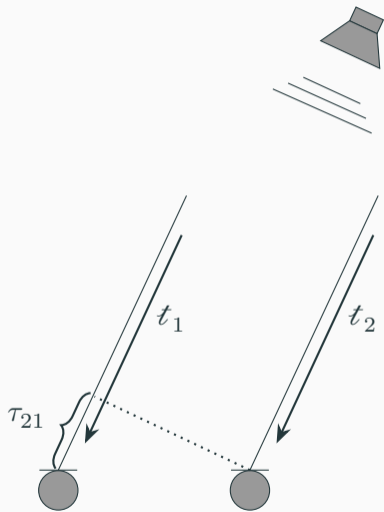
$$\mathbf{x}(k, n) = \sum_{q=1}^Q \mathbf{a}_q(k) s_{r,q}(k, n)$$
$$(s_{r,q}(k, n) = h_{r,q}(k) \check{s}_q(k, n))$$

# 平面波モデルにおける ATF と RTF の関係

- ある音源とマイク 2 に関する RTF は

$$\begin{aligned} a_2(k) &= \frac{\alpha e^{-j\omega_k \frac{d_{2,q}}{c} f_s}}{\alpha e^{-j\omega_k \frac{d_{1,q}}{c} f_s}} \\ &= e^{-j\omega_k \frac{(d_{2,q} - d_{1,q})}{c} f_s} \end{aligned}$$

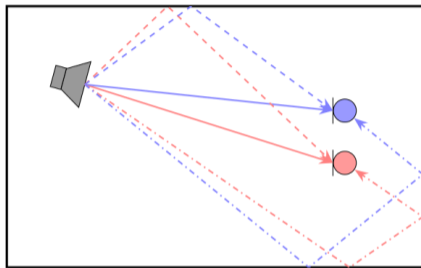
- $r = 1$
- $t_m = \frac{d_{m,q}}{c}$ : time of arrival (TOA)
- $\tau_{21} = \frac{(d_{2,q} - d_{1,q})}{c}$ :  
time difference of arrival (TDOA)
- マイク間の振幅比と時間差を表現



# ここまでのまとめ

- 観測信号の物理モデル

- 音源  $s_q$  は直接音や反射音を含んで観測される
- 線形時不変システムに基づきモデル化
- STFT により、観測信号はソースイメージと RTF の積により記述される ( $r$  は省略)



$$\mathbf{x}(k, n) = \sum_q \mathbf{a}_q(k) s_q(k, n)$$

$$\begin{pmatrix} x_1(k, n) \\ x_2(k, n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1(k) \\ a_2(k) \end{pmatrix} s(k, n)$$

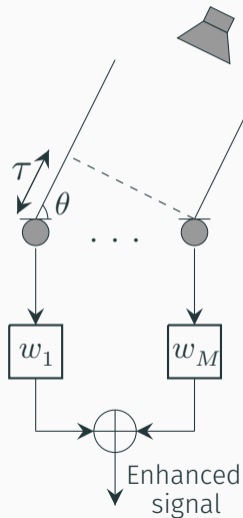
## 時間差推定の概要と相互相関関数

---



# マイクロフォンアレイと時間差

- 時間差 (*time delay; TD*) or TDOA:
    - 近いマイクが先に、遠いマイクは遅れて音を観測
    - 周波数領域では位相差 (cf. RTF の位相項  $e^{-j\omega_k\tau}$ )
  - マイクアレイ信号処理において  
時間差  $\tau$  は極めて重要な**空間情報**
    - 音源到来方向 (*direction of arrival; DOA*) 推定  
( $\tau = d \cos(\theta)/c$ )
    - 音源強調, 音源分離 (空間フィルタ)
    - 信号の同期化 (同期加算など)
- ▶ どのように 1. モデル化して, 2. 最適化するか
- 以降, 音源数は1とする



# 時間差推定における観測モデル [J. Chen+, 2006]

---

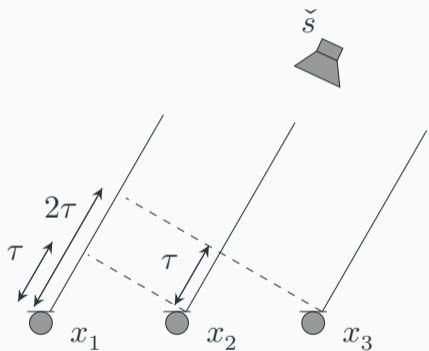
1. 理想伝搬モデル
2. マルチパスモデル
3. 残響モデル

# 時間差推定における観測モデル その1

## 1. 理想伝搬モデル

$$x_m(t) = \underbrace{\alpha_m}_{\text{信号減衰}} \underbrace{\check{s}[t - g_m(\tau)]}_{\text{時間差}} + \underbrace{u_m(t)}_{\text{雑音}}$$

- 時間差と信号減衰のみ考慮したモデル  
→ 残響は考慮されていない
- 平面波モデルかつ等間隔線形アレイなら  
 $g_m(\tau) = (m-1)\tau$  ( $g_1$  は常に 0)
- $u_m(t)$ : マイク  $m$  での雑音
- アレイ配置が既知なら  $g_m$  は定められる
- 解きたい問題:  $x(t)$  から時間差  $\tau$  を推定



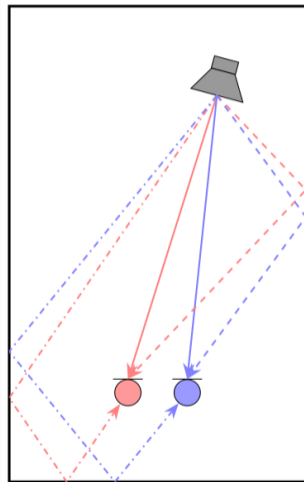
# 時間差推定における観測モデル その2

## 2. マルチパスモデル

$$x_m(t) = \sum_{p=1}^P \alpha_{m,p} \check{s}(t - \tau_{m,p}) + u_m(t)$$

パス  $p$  の時間差

- 残響を考慮したモデル ( $\tau_{1,1} = 0$ )  
→ ただし、高々  $P$  個のパスのみ考慮
- $\alpha_{m,p}$ :  $p$  番目のパスの信号減衰
- 解きたい問題: 時間差  $\tau_{m,1} (\forall m)$  を推定
- 例: 水中で、直接波と海面・海底での反射音をモデル化

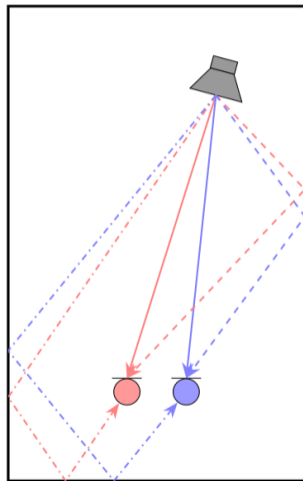


# 時間差推定における観測モデル その3

## 3. 残響モデル

$$x_m(t) = h_m * \check{s}(t) + u_m(t)$$

- 音源とインパルス応答の畳み込みでモデル化  
→ 時間差は明示的には表されない
- 解きたい問題:
  1. インパルス応答の推定
  2. 対応する直接音のパスを推定
- ブラインドにインパルス応答を推定するのは非常に困難



# 相互相関関数と時間差推定

- 相互相関関数の最大化による時間差推定 [C.Knapp+, 1976]
  - 理想伝搬モデルを仮定した, 広く利用されるアルゴリズム
  - 2 マイク 1 音源の場合にのみ利用可能
  - $W_k \in \mathbb{R}_+$ : 任意の重み関数
  - 2 つの信号  $x_{1kn}$  と  $x_{2kn}$  について (以降  $\mathbf{x}(k, n)$  を  $\mathbf{x}_{kn}$  と表記)

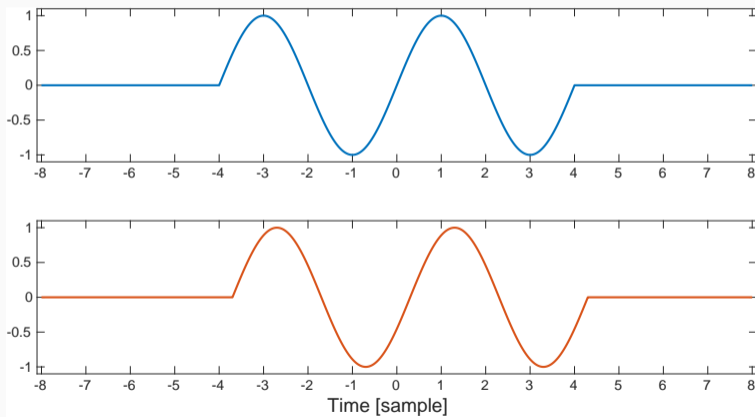
$$\Phi^{(12)}(\tau) = \frac{1}{K} \sum_{k=-K/2+1}^{K/2} W_k V_{12k} e^{j\omega_k \tau}$$

$$V_{12k} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_{1kn}^* x_{2kn}$$

$$\hat{\tau}_{12} = \arg \max_{\tau} \Phi^{(12)}(\tau)$$

# 相互相関関数と時間差

- 信号  $x(\tilde{t})$  と  $y(\tilde{t})$  の相互相関関数  $\Phi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tilde{t})y(\tilde{t} + \tau)dt$



# 相互相関関数と時間差

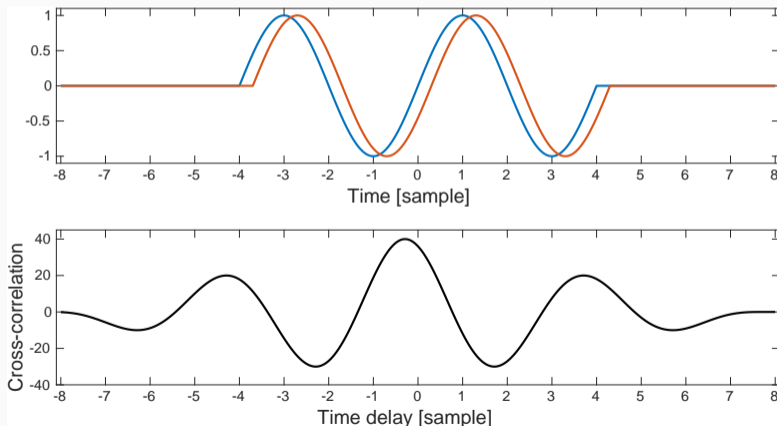
---

- 信号  $x(\tilde{t})$  と  $y(\tilde{t})$  の相互相関関数  $\Phi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tilde{t})y(\tilde{t} + \tau)dt$



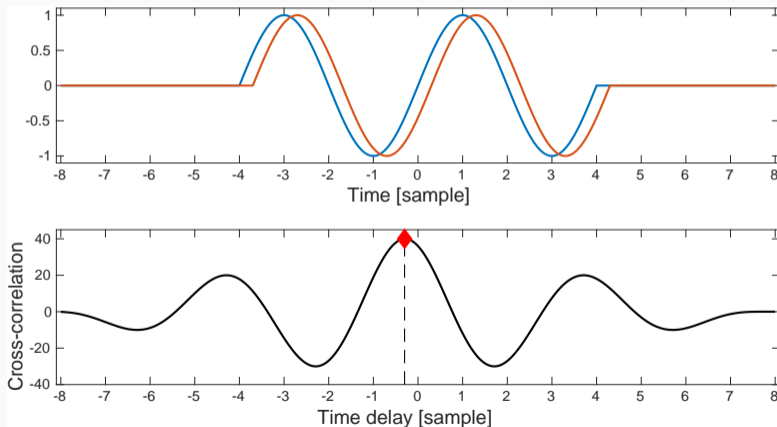
# 相互相関関数と時間差

- 信号  $x(\tilde{t})$  と  $y(\tilde{t})$  の相互相関関数  $\Phi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tilde{t})y(\tilde{t} + \tau)dt$



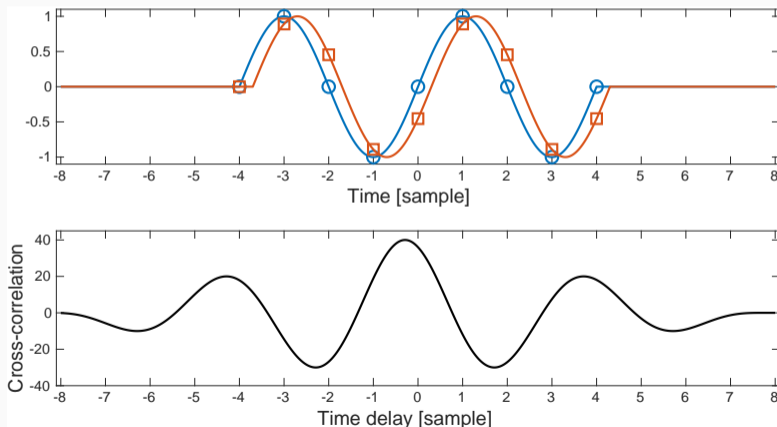
# 相互相関関数の最大化による時間差推定

- 最大値に対応する時間差を求めればよい？



# 離散信号に対する相互相関関数と時間差

- 離散信号  $x[n]$  と  $y[n]$  の相互相関関数  $\Phi[\nu] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y[n + \nu]$



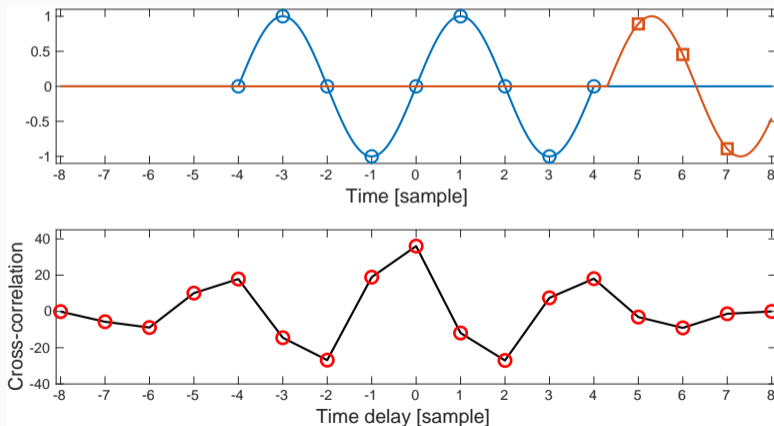
# 離散信号に対する相互相関関数と時間差

---

- 離散信号  $x[n]$  と  $y[n]$  の相互相関関数  $\Phi[\nu] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y[n + \nu]$

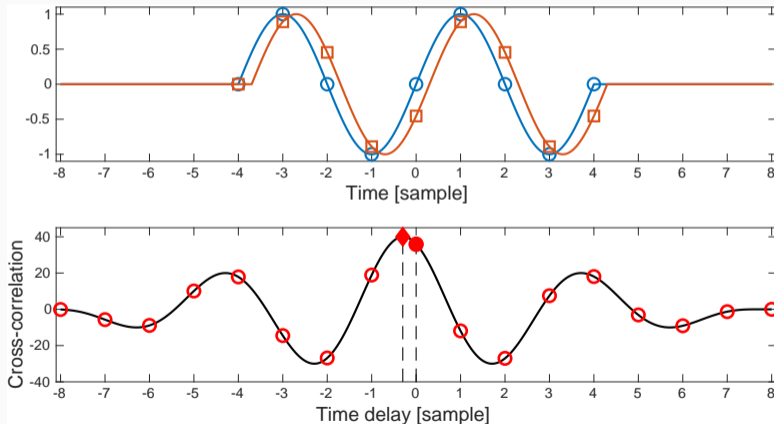
# 離散信号に対する相互相関関数と時間差

- 離散信号  $x[n]$  と  $y[n]$  の相互相関関数  $\Phi[\nu] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y[n + \nu]$



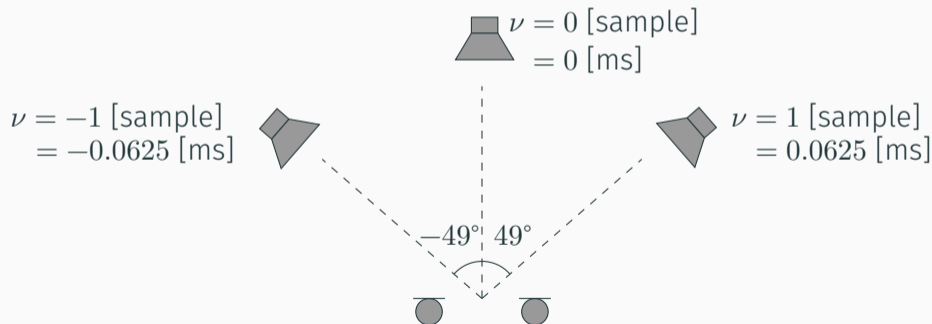
# 相互相関関数の最大化と時間差推定

- 単純な最大化では推定精度に限界がある



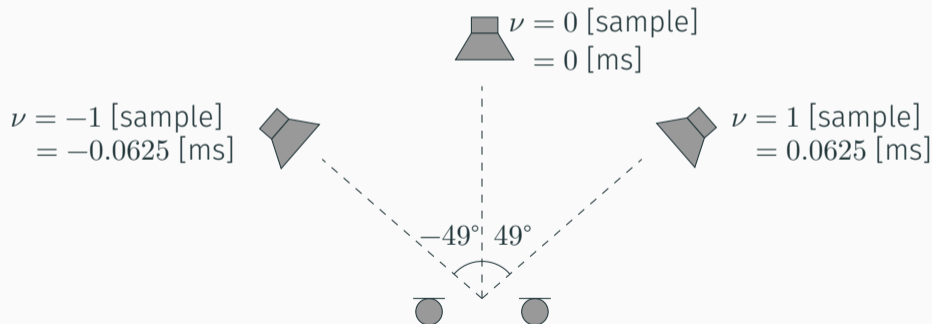
# 単純な推定の例

- 一般に，相互相関は離散時間差  $\nu$  に対してのみ計算
  - 例) マイク間隔 3.4 cm, サンプル周波数 16 kHz, 音速 340 m/s



# 単純な推定の例

- 一般に，相互相関は離散時間差  $\nu$  に対してのみ計算
  - 例) マイク間隔 3.4 cm，サンプリング周波数 16 kHz，音速 340 m/s
  - サンプル単位より細かい精度（サブサンプル）での推定が必要





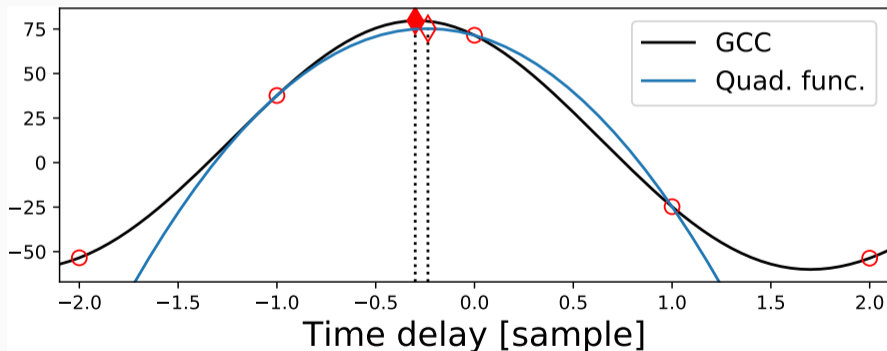
# 様々なサブサンプル時間差推定法

---

- 補間に基づく手法
  - 2次関数補間 [Jacovitti+, 1993]
  - ガウス関数のフィッティング [Zhang+, 2006]
  - 周波数領域におけるゼロ詰め
- 探索に基づく手法
  - 三分探索, 黄金分割探索 [Kiefer, 1953]
- 解析的な手法
  - 補助関数法に基づく手法 [Yamaoka+, 2019] (提案法)

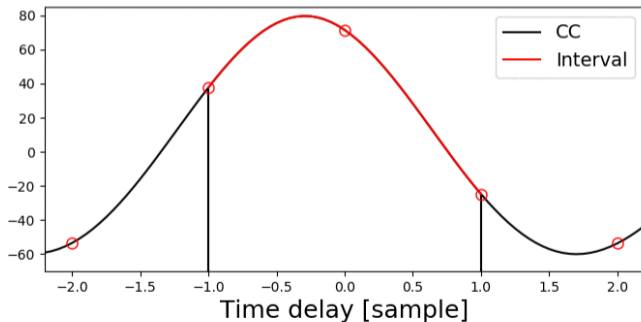
# 2次関数補間に基づくサブサンプル時間差推定

- 離散最大値付近の相互相関を補間する
  - 2次関数補間による近似解



# 探索によるサブサンプル時間差推定

- 黄金分割探索 (Golden section search; GSS)
  - 探索区間を狭めることで、単峰関数の最大値を探索



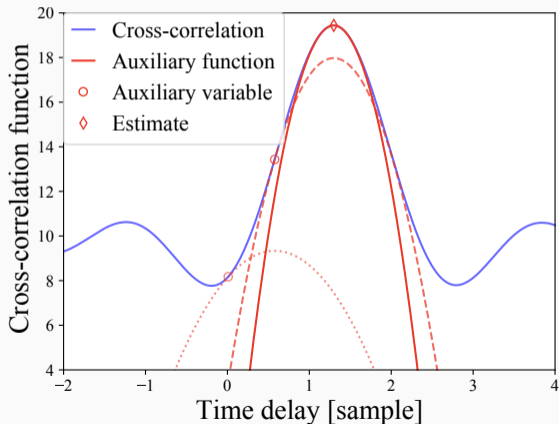
# 探索によるサブサンプル時間差推定

---

- 黄金分割探索 (Golden section search; GSS)
  - 探索区間を狭めることで、単峰関数の最大値を探索

# 補助関数法に基づくサブサンプル時間差推定

- AuxTDE (auxiliary-function based time delay estimation)
  - 補助関数を繰り返し最大化することで、相互相関の最大値を推定



# 相互相関関数と時間差推定（再掲）

- 相互相関関数の最大化による時間差推定 [C.Knapp+, 1976]
  - 理想伝搬モデルを仮定した，広く利用されるアルゴリズム
  - 2 マイク 1 音源の場合にのみ利用可能
  - $W_k \in \mathbb{R}_+$ : 任意の重み関数
  - 2 つの信号  $x_{1kn}$  と  $x_{2kn}$  について（以降  $\mathbf{x}(k, n)$  を  $\mathbf{x}_{kn}$  と表記）

$$\Phi^{(12)}(\tau) = \frac{1}{K} \sum_{k=-K/2+1}^{K/2} W_k V_{12k} e^{j\omega_k \tau}$$

$$V_{12k} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_{1kn}^* x_{2kn}$$

$$\hat{\tau}_{12} = \arg \max_{\tau} \Phi^{(12)}(\tau)$$

## 補助関数法に基づく時間差推定

---

# 補助関数法 (majorization-minimization alg.)

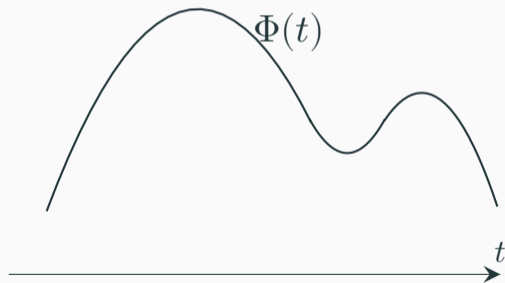
- 補助関数  $Q(t, \theta)$  を最適化することで、最適化困難な目的関数  $\Phi(t)$  を最適化

[D. R. Hunter+, 2004], [K. Lnage, 2016]

- $\Phi(t) = \max_{\theta} Q(t, \theta)$  を満たす
- $t$  と補助変数  $\theta$  を交互に更新する

- 更新則:

- $\theta^{(l+1)} = \arg \max_{\theta} Q(t^{(l)}, \theta^{(l)})$
- $t^{(l+1)} = \arg \max_t Q(t^{(l)}, \theta^{(l+1)})$



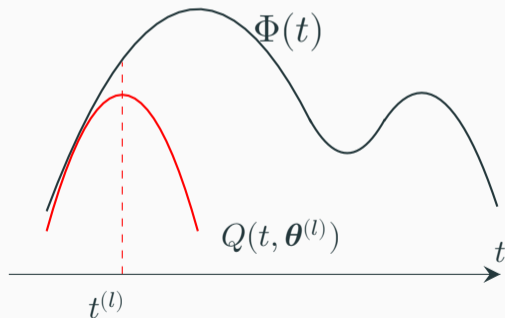


# 補助関数法 (majorization-minimization alg.)

- 補助関数  $Q(t, \theta)$  を最適化することで、最適化困難な目的関数  $\Phi(t)$  を最適化

[D. R. Hunter+, 2004], [K. Lnage, 2016]

- $\Phi(t) = \max_{\theta} Q(t, \theta)$  を満たす
  - $t$  と補助変数  $\theta$  を交互に更新する
- 更新則:
    - $\theta^{(l+1)} = \arg \max_{\theta} Q(t^{(l)}, \theta^{(l)})$
    - $t^{(l+1)} = \arg \max_t Q(t^{(l)}, \theta^{(l+1)})$



# 補助関数法 (majorization-minimization alg.)

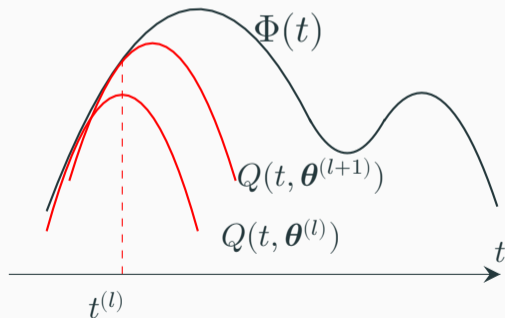
- 補助関数  $Q(t, \theta)$  を最適化することで、最適化困難な目的関数  $\Phi(t)$  を最適化

[D. R. Hunter+, 2004], [K. Lnage, 2016]

- $\Phi(t) = \max_{\theta} Q(t, \theta)$  を満たす
- $t$  と補助変数  $\theta$  を交互に更新する

- 更新則:

- $\theta^{(l+1)} = \arg \max_{\theta} Q(t^{(l)}, \theta^{(l)})$
- $t^{(l+1)} = \arg \max_t Q(t^{(l)}, \theta^{(l+1)})$



# 補助関数法 (majorization-minimization alg.)

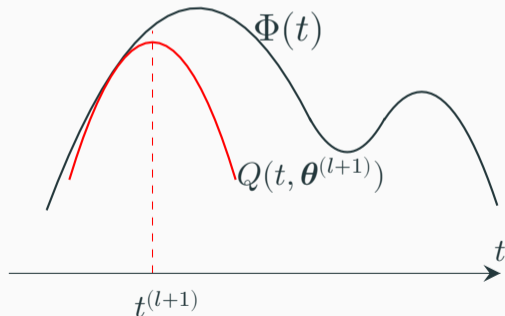
- 補助関数  $Q(t, \theta)$  を最適化することで、最適化困難な目的関数  $\Phi(t)$  を最適化

[D. R. Hunter+, 2004], [K. Lnage, 2016]

- $\Phi(t) = \max_{\theta} Q(t, \theta)$  を満たす
- $t$  と補助変数  $\theta$  を交互に更新する

- 更新則:

- $\theta^{(l+1)} = \arg \max_{\theta} Q(t^{(l)}, \theta^{(l)})$
- $t^{(l+1)} = \arg \max_t Q(t^{(l)}, \theta^{(l+1)})$



# 補助関数法 (majorization-minimization alg.)

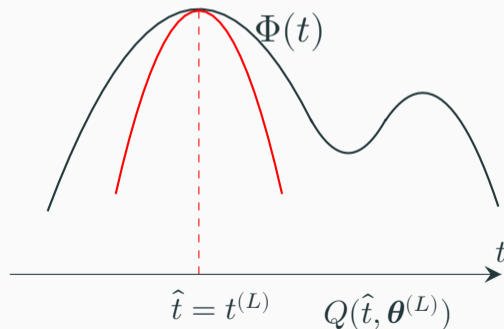
- 補助関数  $Q(t, \theta)$  を最適化することで、最適化困難な目的関数  $\Phi(t)$  を最適化

[D. R. Hunter+, 2004], [K. Lnage, 2016]

- $\Phi(t) = \max_{\theta} Q(t, \theta)$  を満たす
- $t$  と補助変数  $\theta$  を交互に更新する

- 更新則:

- $\theta^{(l+1)} = \arg \max_{\theta} Q(t^{(l)}, \theta^{(l)})$
- $t^{(l+1)} = \arg \max_t Q(t^{(l)}, \theta^{(l+1)})$

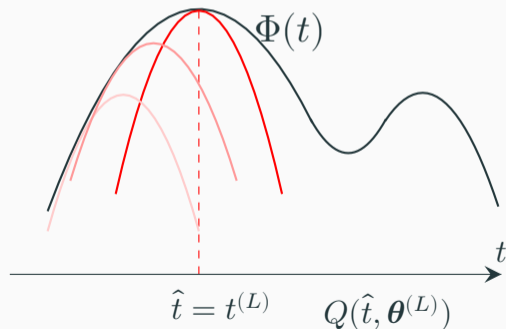


# 補助関数法 (majorization-minimization alg.)

- 補助関数  $Q(t, \theta)$  を最適化することで、最適化困難な目的関数  $\Phi(t)$  を最適化

[D. R. Hunter+, 2004], [K. Lnage, 2016]

- $\Phi(t) = \max_{\theta} Q(t, \theta)$  を満たす
  - $t$  と補助変数  $\theta$  を交互に更新する
- 重要な特徴
    - 単調増加の保証
    - パラメータ調整不要

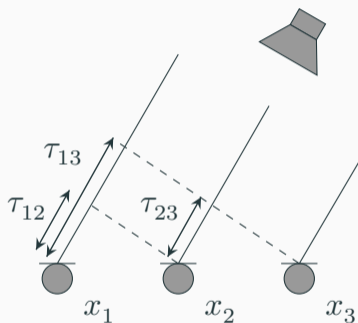


# 多チャンネル時間差推定の問題設定

- 1音源  $M$  マイクのとき

- 時間差は  ${}_M C_2$  個存在

- 相互相関関数の最大化による時間差推定では  
マイク  $i, j$  間の時間差  $\tau_{ij}$  について、  
マイク 1 を基準とし、 $\tau_{12}, \tau_{13}$  を順に推定



# 多チャンネル時間差推定の問題設定

- 1音源  $M$  マイクのとき

- 時間差は  ${}_M C_2$  個存在

- 相互相関関数の最大化による時間差推定では  
マイク  $i, j$  間の時間差  $\tau_{ij}$  について、  
マイク 1 を基準とし、 $\tau_{12}, \tau_{13}$  を順に推定

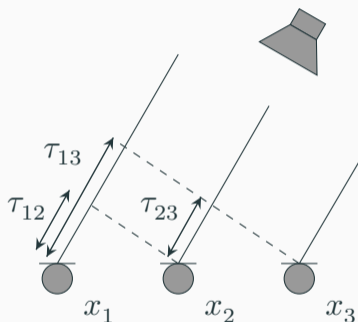
- 問題点

- 時間差推定値が参照マイクに依存  
→ 時間差の非一貫性 (冗長性)

[W. Hahn+, 1973], [J. Scheuing+, 2008]

$$\tau_{23} = \tau_{13} - \tau_{12} \quad (\text{物理的な関係})$$

$$\hat{\tau}_{23} \neq \hat{\tau}_{13} - \hat{\tau}_{12} \quad (\text{推定値間の関係})$$



# 提案法における観測モデルと問題設定

- $M$ チャネルマイクアレイでの観測信号  $x_{kn}$  の物理モデル
  - $k, n$ : 周波数, フレームインデックス,  $j$ : 虚数単位
  - $\omega_k = 2\pi k/K$ ,  $K$ : フレーム長
  - $\tau_{ri}$ : 参照マイク  $r$  とマイク  $i$  間の時間差  $\rightarrow \alpha_{rk} = 1, \tau_{rr} = 0$
  - $\tau_{ij} = \tau_{i\kappa} + \tau_{\kappa j}$  の関係は暗に導入されている

$$\mathbf{x}_{kn} = s_{kn} \mathbf{a}_k(\boldsymbol{\alpha}_k, \boldsymbol{\tau}) + \mathbf{u}_{kn} \quad (\text{観測モデル}) \quad (1)$$

$$\mathbf{a}_k(\boldsymbol{\alpha}_k, \boldsymbol{\tau}) = [\alpha_{1k} e^{-j\omega_k \tau_{r1}} \cdots \alpha_{Mk} e^{-j\omega_k \tau_{rM}}]^\top \quad (\text{相対伝達関数}) \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\tau} = [\tau_{r1} \cdots \tau_{rM}]^\top \quad (\text{時間差ベクトル}) \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_k = [\alpha_{1k} \cdots \alpha_{Mk}]^\top \quad (\text{振幅ベクトル}) \quad (4)$$



# 提案法における観測モデルと問題設定

- $M$ チャンネルマイクアレイでの観測信号  $\mathbf{x}_{kn}$  の物理モデル
  - $k, n$ : 周波数, フレームインデックス,  $j$ : 虚数単位
  - $\omega_k = 2\pi k/K$ ,  $K$ : フレーム長
  - $\tau_{ri}$ : 参照マイク  $r$  とマイク  $i$  間の時間差  $\rightarrow \alpha_{rk} = 1, \tau_{rr} = 0$
  - $\tau_{ij} = \tau_{i\kappa} + \tau_{\kappa j}$  の関係は暗に導入されている

$$\mathbf{x}_{kn} = s_{kn} \mathbf{a}_k(\boldsymbol{\alpha}_k, \boldsymbol{\tau}) + \mathbf{u}_{kn} \quad (\text{観測モデル}) \quad (1)$$

$$\mathbf{a}_k(\boldsymbol{\alpha}_k, \boldsymbol{\tau}) = [\alpha_{1k} e^{-j\omega_k \tau_{r1}} \cdots \alpha_{Mk} e^{-j\omega_k \tau_{rM}}]^\top \quad (\text{相対伝達関数}) \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\tau} = [\tau_{r1} \cdots \tau_{rM}]^\top \quad (\text{時間差ベクトル}) \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_k = [\alpha_{1k} \cdots \alpha_{Mk}]^\top \quad (\text{振幅ベクトル}) \quad (4)$$

- 解きたい問題:  $\mathbf{x}_{kn}$  のみから  $\boldsymbol{\tau}$  を推定

# 最適化の準備

- 最尤推定による音源  $s_{kn}$  の推定
  - 雑音について,  $\mathbf{u}_{kn} \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, \sigma^2 \mathbf{I})$  を仮定  $\rightarrow$  二乗誤差最小化に帰着

$$\begin{aligned}\hat{s}_{kn} &= \arg \min_s \|\mathbf{x}_{kn} - s\mathbf{a}_k(\boldsymbol{\alpha}_k, \boldsymbol{\tau})\|_2^2 \\ &= \frac{\mathbf{a}_k^H(\boldsymbol{\alpha}_k, \boldsymbol{\tau})\mathbf{x}_{kn}}{\mathbf{a}_k^H(\boldsymbol{\alpha}_k, \boldsymbol{\tau})\mathbf{a}_k(\boldsymbol{\alpha}_k, \boldsymbol{\tau})}\end{aligned}\quad (5)$$

- 最適な  $s_{kn}$  の下, 観測モデルは

$$\mathbf{x}_{kn} = \frac{\mathbf{a}_k^H(\boldsymbol{\alpha}_k, \boldsymbol{\tau})\mathbf{x}_{kn}}{\mathbf{a}_k^H(\boldsymbol{\alpha}_k, \boldsymbol{\tau})\mathbf{a}_k(\boldsymbol{\alpha}_k, \boldsymbol{\tau})}\mathbf{a}_k(\boldsymbol{\alpha}_k, \boldsymbol{\tau}) + \mathbf{u}_{kn}\quad (6)$$

# 最適化問題

- 最尤推定による時間差  $\tau$  の推定

$$\mathcal{J}'_k(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau}) = \mathbb{E} \left[ \left\| \mathbf{x}_{kn} - \frac{\mathbf{a}_k^H(\boldsymbol{\alpha}_k, \boldsymbol{\tau}) \mathbf{x}_{kn}}{\mathbf{a}_k^H(\boldsymbol{\alpha}_k, \boldsymbol{\tau}) \mathbf{a}_k(\boldsymbol{\alpha}_k, \boldsymbol{\tau})} \mathbf{a}_k(\boldsymbol{\alpha}_k, \boldsymbol{\tau}) \right\|_2^2 \right] \quad (7)$$

$$\arg \min_{\boldsymbol{\tau}} \frac{1}{K} \sum_{k=-K/2+1}^{K/2} \mathcal{J}'_k(\boldsymbol{\alpha}_k, \boldsymbol{\tau}) \quad \text{s.t.} \quad \tau_{rr} = 0, \alpha_{rk} = 1, \alpha_{mk} \geq 0 \quad \forall k, m \quad (8)$$

# 最適化問題

- 最尤推定による時間差  $\tau$  の推定

$$\mathcal{J}'_k(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau}) = \mathbb{E} \left[ \left\| \mathbf{x}_{kn} - \frac{\mathbf{a}_k^H(\boldsymbol{\alpha}_k, \boldsymbol{\tau}) \mathbf{x}_{kn}}{\mathbf{a}_k^H(\boldsymbol{\alpha}_k, \boldsymbol{\tau}) \mathbf{a}_k(\boldsymbol{\alpha}_k, \boldsymbol{\tau})} \mathbf{a}_k(\boldsymbol{\alpha}_k, \boldsymbol{\tau}) \right\|_2^2 \right] \quad (7)$$

$$\arg \min_{\boldsymbol{\tau}} \frac{1}{K} \sum_{k=-K/2+1}^{K/2} \mathcal{J}'_k(\boldsymbol{\alpha}_k, \boldsymbol{\tau}) \quad \text{s.t.} \quad \tau_{rr} = 0, \alpha_{rk} = 1, \alpha_{mk} \geq 0 \quad \forall k, m \quad (8)$$

- 展開し整理すれば,

$$\mathcal{J}_k(\boldsymbol{\alpha}_k, \boldsymbol{\tau}) = \frac{\mathbf{a}_k^H(\boldsymbol{\alpha}_k, \boldsymbol{\tau}) \mathbf{V}_k \mathbf{a}_k(\boldsymbol{\alpha}_k, \boldsymbol{\tau})}{\boldsymbol{\alpha}_k^H \boldsymbol{\alpha}_k}, \quad \mathbf{V}_k = \mathbb{E}[\mathbf{x}_{kn} \mathbf{x}_{kn}^H] \quad (9)$$

$$\arg \max_{\boldsymbol{\tau}} \frac{1}{K} \sum_{k=-K/2+1}^{K/2} \mathcal{J}_k(\boldsymbol{\alpha}_k, \boldsymbol{\tau}) \quad \text{s.t.} \quad \tau_{rr} = 0, \alpha_{rk} = 1, \alpha_{mk} \geq 0 \quad \forall k, m \quad (10)$$

# 最適化のアプローチ

- 目的関数  $\mathcal{J}_k(\alpha_k, \tau)$  の最大化は同時最適化問題  $\rightarrow$  交互に解く
  - 複数時間差の同時推定 ( $\alpha_k$  は fixed)

$$\tau = \arg \max_{\tau} \frac{1}{K} \sum_{k=-K/2+1}^{K/2} \mathcal{J}_k(\tau) \quad \text{s.t.} \quad \tau_{rr} = 0 \quad (11)$$

- 振幅推定 ( $\tau$  は fixed)

$$\alpha_k = \arg \max_{\alpha_k} \frac{1}{K} \sum_{k=-K/2+1}^{K/2} \mathcal{J}_k(\alpha_k) \quad \text{s.t.} \quad \alpha_{rk} = 1, \alpha_{mk} \geq 0 \quad \forall k, m \quad (12)$$

# 目的関数の解釈

- 目的関数は相互相関関数の和

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_k(\boldsymbol{\tau}) &= \mathbf{a}_k^H(\boldsymbol{\alpha}_k, \boldsymbol{\tau}) \mathbf{V}_k \mathbf{a}_k(\boldsymbol{\alpha}_k, \boldsymbol{\tau}) \\ &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \alpha_{ik} \alpha_{jk} V_{ijk} e^{j\omega_k(\tau_{rj} - \tau_{ri})} \\ &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \alpha_{ik} \alpha_{jk} \underline{V_{ijk} e^{j\omega_k \tau_{ij}}} \end{aligned} \tag{13}$$

観測  $i, j$  間の相互相関関数

- $M = 2$  のとき、相互相関関数の最大化に一致
- ただし、ラインサーチでは  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^{M-1}$  の推定はできない

# 時間差推定のアプローチ

- 目的関数  $J_k(\tau)$  について，指数部  $\tau$  の最適化は困難

$$\sum_k \begin{pmatrix} \alpha_{1k} e^{-j\omega_k \tau_{r1}} \\ \alpha_{2k} e^{-j\omega_k \tau_{r2}} \\ \vdots \\ \alpha_{Mk} e^{-j\omega_k \tau_{rM}} \end{pmatrix}^H \mathbf{V}_k \begin{pmatrix} \alpha_{1k} e^{-j\omega_k \tau_{r1}} \\ \alpha_{2k} e^{-j\omega_k \tau_{r2}} \\ \vdots \\ \alpha_{Mk} e^{-j\omega_k \tau_{rM}} \end{pmatrix}$$

(14)

# 時間差推定のアプローチ

- 目的関数  $J_k(\tau)$  について，指数部  $\tau$  の最適化は困難
- もし，以下のような補助関数が設計できれば...

$$\sum_k \begin{pmatrix} \alpha_{1k} e^{-j\omega_k \tau_{r1}} \\ \alpha_{2k} e^{-j\omega_k \tau_{r2}} \\ \vdots \\ \alpha_{Mk} e^{-j\omega_k \tau_{rM}} \end{pmatrix}^H \mathbf{V}_k \begin{pmatrix} \alpha_{1k} e^{-j\omega_k \tau_{r1}} \\ \alpha_{2k} e^{-j\omega_k \tau_{r2}} \\ \vdots \\ \alpha_{Mk} e^{-j\omega_k \tau_{rM}} \end{pmatrix} \geq \sum_k - \begin{pmatrix} \tau_{r1} \\ \tau_{r2} \\ \vdots \\ \tau_{rM} \end{pmatrix}^T \mathbf{C}_k \begin{pmatrix} \tau_{r1} \\ \tau_{r2} \\ \vdots \\ \tau_{rM} \end{pmatrix} - \mathbf{c}_k^T \begin{pmatrix} \tau_{r1} \\ \tau_{r2} \\ \vdots \\ \tau_{rM} \end{pmatrix} + C \quad (14)$$



# 時間差推定のアプローチ

- 目的関数  $J_k(\tau)$  について，指数部  $\tau$  の最適化は困難
- もし，以下のような補助関数が設計できれば...

$$\sum_k \begin{pmatrix} \alpha_{1k} e^{-j\omega_k \tau_{r1}} \\ \alpha_{2k} e^{-j\omega_k \tau_{r2}} \\ \vdots \\ \alpha_{Mk} e^{-j\omega_k \tau_{rM}} \end{pmatrix}^H \mathbf{V}_k \begin{pmatrix} \alpha_{1k} e^{-j\omega_k \tau_{r1}} \\ \alpha_{2k} e^{-j\omega_k \tau_{r2}} \\ \vdots \\ \alpha_{Mk} e^{-j\omega_k \tau_{rM}} \end{pmatrix} \geq \sum_k - \begin{pmatrix} \tau_{r1} \\ \tau_{r2} \\ \vdots \\ \tau_{rM} \end{pmatrix}^T \mathbf{C}_k \begin{pmatrix} \tau_{r1} \\ \tau_{r2} \\ \vdots \\ \tau_{rM} \end{pmatrix} - \mathbf{c}_k^T \begin{pmatrix} \tau_{r1} \\ \tau_{r2} \\ \vdots \\ \tau_{rM} \end{pmatrix} + C \quad (14)$$

- 右辺は  $\tau$  の二次形式 + 一次項であり，簡単に最適化可能  
→ 補助関数法に基づく，逐次的な最大化が可能

# 補助関数設計の方針

---

1. 目的関数がコサイン関数の和で記述されることを示す
  2. コサイン関数に対する二次の補助関数を示す
  3. 上記を用いて，目的関数に対する補助関数を示す
  4. 補助関数が  $\tau$  の二次形式等で記述されることを示す
- Note: 以降，以下を使用
    - $|V_{ijk}| = A_{ijk}, \angle V_{ijk} = \phi_{ijk}$
    - $V_{ijk} = A_{ijk} e^{j\phi_{ijk}}$

# 1. 目的関数の式変形

- コサイン関数の和としての  $\mathcal{J}_k(\tau)$

$$\begin{aligned}\sum_{k=-K/2+1}^{K/2} \mathcal{J}_k(\tau) &= \sum_{k=-K/2+1}^{K/2} \sum_{i,j=1}^M \alpha_{ik} \alpha_{jk} V_{ijk} e^{j\omega_k \tau_{ij}} \\ &= \sum_{k=-K/2+1}^{K/2} \sum_{i,j=1}^M \alpha_{ik} \alpha_{jk} A_{ijk} e^{j(\omega_k \tau_{ij} + \phi_{ijk})} \\ &= \sum_{k=-K/2+1}^{K/2} \sum_{i,j=1}^M \alpha_{ik} \alpha_{jk} A_{ijk} [\cos(\omega_k \tau_{ij} + \phi_{ijk}) + j \sin(\omega_k \tau_{ij} + \phi_{ijk})] \\ &= \sum_{k=0}^{K/2} \sum_{i,j=1}^M \beta_k \alpha_{ik} \alpha_{jk} A_{ijk} \cos(\omega_k \tau_{ij} + \phi_{ijk})\end{aligned}\tag{15}$$

↓ オイラーの公式

↓ 複素共役

# 1. 目的関数の式変形

- コサイン関数の和としての  $\mathcal{J}_k(\boldsymbol{\tau})$

$$\sum_{k=-K/2+1}^{K/2} \mathcal{J}_k(\boldsymbol{\tau}) = \sum_{k=0}^{K/2} \sum_{i,j=1}^M \beta_k \alpha_{ik} \alpha_{jk} A_{ijk} \cos(\omega_k \tau_{ij} + \phi_{ijk}) \geq 0 \quad (16)$$

- $\beta_k = 1$  ( $k = 0, K/2$ ),  $\beta_k = 2$  (otherwise)
- $\cos \theta \geq a\theta^2 + b\theta + c$  のような補助関数が存在すれば  
目的関数に対する二次の補助関数も設計可能

## 2. コサイン関数に対する二次の補助関数 (1/2)

---

- ある関数に対する補助関数は複数存在する
  - 任意のパラメータ  $t$  に対して  $\mathcal{J}(t) = Q(t, \theta)$  を満たす補助変数  $\theta$  が存在し
  - 任意の  $\theta$  に対して  $\mathcal{J}(t) \geq Q(t, \theta)$  が成り立てば良い

## 2. コサイン関数に対する二次の補助関数 (1/2)

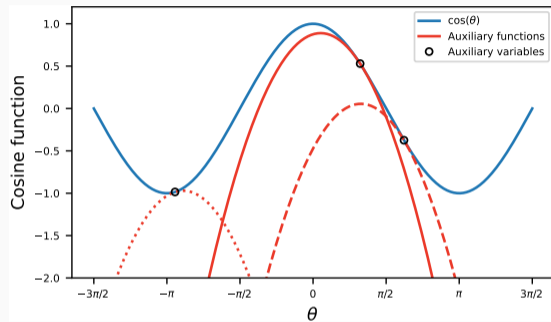
- ある関数に対する補助関数は複数存在する
  - 任意のパラメータ  $t$  に対して  $\mathcal{J}(t) = Q(t, \theta)$  を満たす補助変数  $\theta$  が存在し
  - 任意の  $\theta$  に対して  $\mathcal{J}(t) \geq Q(t, \theta)$  が成り立てば良い
- コサイン関数に対する補助関数の例 ([K. Lange, 2016] を改変)
  - 与えられた  $x$  に対して, 2 次の Taylor 展開を用いて

$$\cos(y) = \cos(x) - \sin(x)(y - x) - \frac{1}{2} \cos(z)(y - x)^2$$

- を満たす  $z$  ( $x$  と  $y$  の間の点) が存在し,  $|\cos(z)| \leq 1$  より  
(*quadratic upper bound principle*)

$$\cos(y) \geq Q(y, x) = \cos(x) - \sin(x)(y - x) - \frac{1}{2}(y - x)^2$$

# コサイン関数に対する二次の補助関数の例 (1/2)



- これで良い？  
→ もう少し幅を広げられそう

## 2. コサイン関数に対する二次の補助関数 (2/2)

---

- $|\theta_0| \leq \pi$  とする. 任意の実数  $\theta$  について, 次の不等式が成り立つ

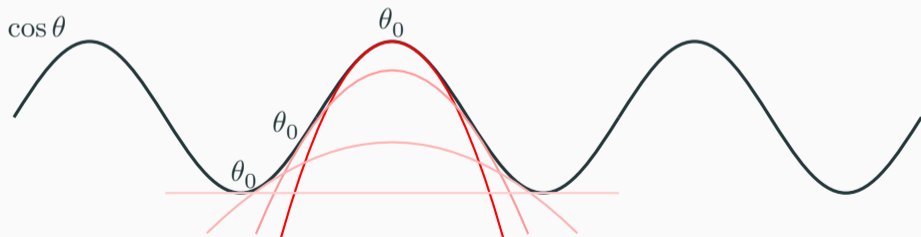
$$\cos \theta \geq -\frac{1}{2} \frac{\sin \theta_0}{\theta_0} \theta^2 + \left( \cos \theta_0 + \frac{1}{2} \theta_0 \sin \theta_0 \right) \quad (17)$$



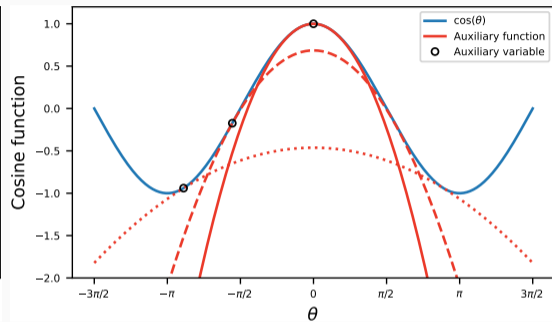
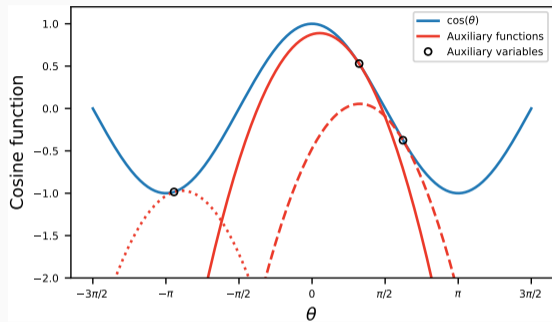
## 2. コサイン関数に対する二次の補助関数 (2/2)

- $|\theta_0| \leq \pi$  とする. 任意の実数  $\theta$  について, 次の不等式が成り立つ

$$\cos \theta \geq -\frac{1}{2} \frac{\sin \theta_0}{\theta_0} \theta^2 + \left( \cos \theta_0 + \frac{1}{2} \theta_0 \sin \theta_0 \right) \quad (17)$$



# コサイン関数に対する二次の補助関数の例 (2/2)



- これで良い?  
→ もう少し幅を広げられそう

- 1度の更新で収束  
→ 左図よりもよさそう

### 3. 目的関数に対する二次の補助関数

- $Q_k(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\theta})$  は以下を満たす補助関数である
  - 任意の  $\boldsymbol{\tau}$  及び  $\boldsymbol{\theta}$  に対して,  $\mathcal{J}_k(\boldsymbol{\tau}) \geq Q_k(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\theta})$
  - 任意の  $\boldsymbol{\tau}_0$  に対して,  $\mathcal{J}_k(\boldsymbol{\tau}_0) = Q_k(\boldsymbol{\tau}_0, \boldsymbol{\theta}_0)$  を満たすような  $\boldsymbol{\theta}_0 = f(\boldsymbol{\tau}_0)$  が存在

$$Q_k(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\theta}) = \sum_{i,j=1}^M -\frac{B_{ijk}}{2} \{ \omega_k \tau_{ij} + \phi'_{ijk} \}^2 + C \quad (18)$$

$$B_{ijk} = \frac{\beta_k}{K} \alpha_{ik} \alpha_{jk} A_{ijk} \frac{\sin \theta_{ijk}}{\theta_{ijk}}, \quad \phi'_{ijk} = \phi_{ijk} + 2\nu_{ijk}\pi \quad (19)$$

## 4. 補助関数の式変形

- $Q_k(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\theta})$  は  $\boldsymbol{\tau}$  の二次形式を用いて、以下で記述される

$$Q_k(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\theta}) = -\boldsymbol{\tau}^\top \mathbf{C}_k \boldsymbol{\tau} - 2\mathbf{c}_k^\top \boldsymbol{\tau} + C, \quad (20)$$

$$\mathbf{C}_k = \omega_k^2 \{ \text{diag}(\mathbf{b}_k) - \mathbf{B}_k \}, \quad (21)$$

$$\mathbf{b}_k = \left( \sum_{i=1}^M B_{i1k}, \dots, \sum_{i=1}^M B_{iMk} \right)^\top, \quad (22)$$

$$\mathbf{c}_k = \omega_k \left( \sum_{i=1}^M B_{i1k} \phi'_{i1k}, \dots, \sum_{i=1}^M B_{iMk} \phi'_{iMk} \right)^\top, \quad (23)$$

# 時間差推定のアプローチ（再掲）

- 目的関数  $J_k(\tau)$  について，指数部  $\tau$  の最適化は困難
- もし，以下のような補助関数が設計できれば...

$$\sum_k \begin{pmatrix} \alpha_{1k} e^{-j\omega_k \tau_{r1}} \\ \alpha_{2k} e^{-j\omega_k \tau_{r2}} \\ \vdots \\ \alpha_{Mk} e^{-j\omega_k \tau_{rM}} \end{pmatrix}^H \mathbf{V}_k \begin{pmatrix} \alpha_{1k} e^{-j\omega_k \tau_{r1}} \\ \alpha_{2k} e^{-j\omega_k \tau_{r2}} \\ \vdots \\ \alpha_{Mk} e^{-j\omega_k \tau_{rM}} \end{pmatrix} \geq \sum_k - \begin{pmatrix} \tau_{r1} \\ \tau_{r2} \\ \vdots \\ \tau_{rM} \end{pmatrix}^T \mathbf{C}_k \begin{pmatrix} \tau_{r1} \\ \tau_{r2} \\ \vdots \\ \tau_{rM} \end{pmatrix} - \mathbf{c}_k^T \begin{pmatrix} \tau_{r1} \\ \tau_{r2} \\ \vdots \\ \tau_{rM} \end{pmatrix} + C \quad (14)$$

- 右辺は  $\tau$  の二次形式 + 一次項であり，簡単に最適化可能  
→ 補助関数法に基づく，逐次的な最大化が可能

# 更新式

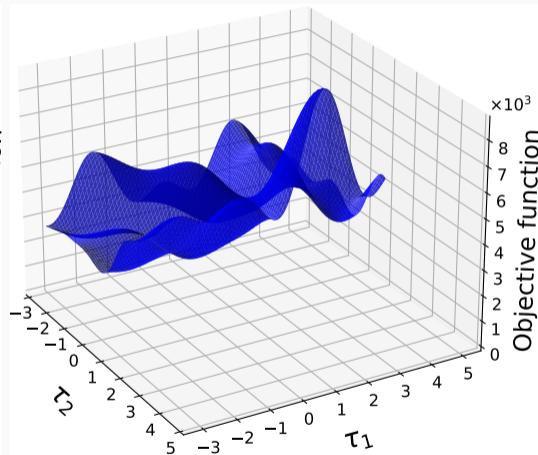
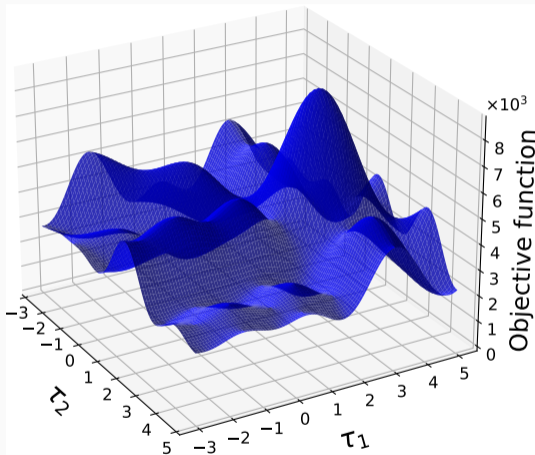
- $\tau_r = 0$  に注意すれば, 更新式は
  - $\bar{r}$  はインデックス  $i = 1 \dots M, i \neq r$  を意味する

$$\nu_{ijk}^{(\ell)} \leftarrow \arg \min_{\nu \in \mathbb{Z}} \left| \omega_k \left( \tau_{rj}^{(\ell)} - \tau_{ri}^{(\ell)} \right) + \phi_{ijk} + 2\nu\pi \right| \quad (24)$$

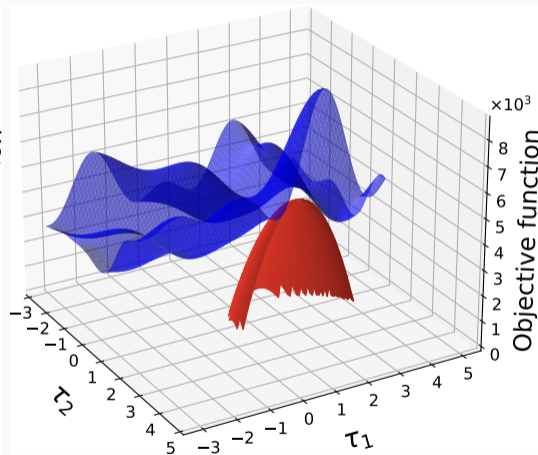
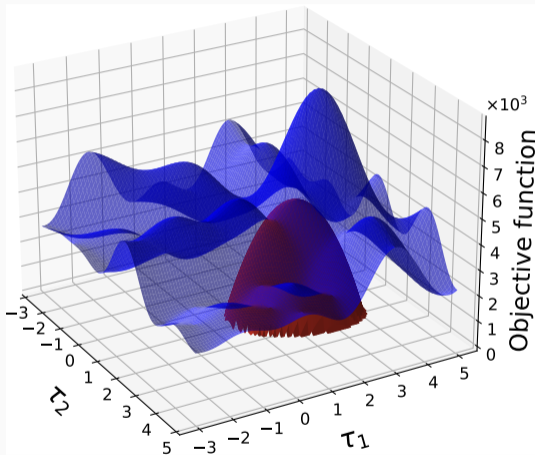
$$\theta_{ijk}^{(\ell)} \leftarrow \omega_k \left( \tau_{rj}^{(\ell)} - \tau_{ri}^{(\ell)} \right) + \phi_{ijk} + 2\nu_{ijk}^{(\ell)}\pi, \forall i, j, k \quad (25)$$

$$\tau_{\bar{r}}^{(\ell+1)} \leftarrow \tau_{\bar{r}}^{(\ell)} - \left( \sum_{k=0}^{K/2} \mathbf{C}_{k, \bar{r}}^{(\ell)} \right)^{-1} \sum_{k=0}^{K/2} \mathbf{c}'_{k, \bar{r}}^{(\ell)} \quad (26)$$

# 目的関数と補助関数の例

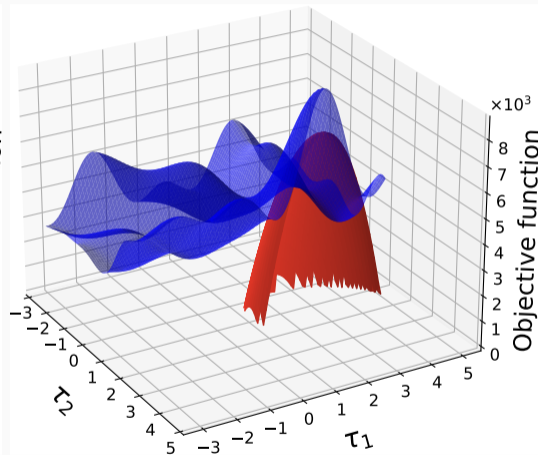
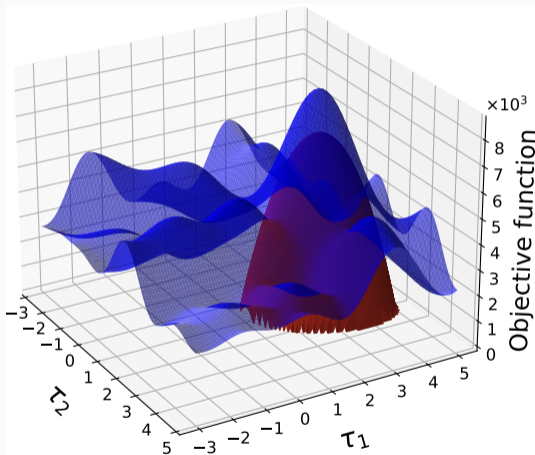


# 目的関数と補助関数の例

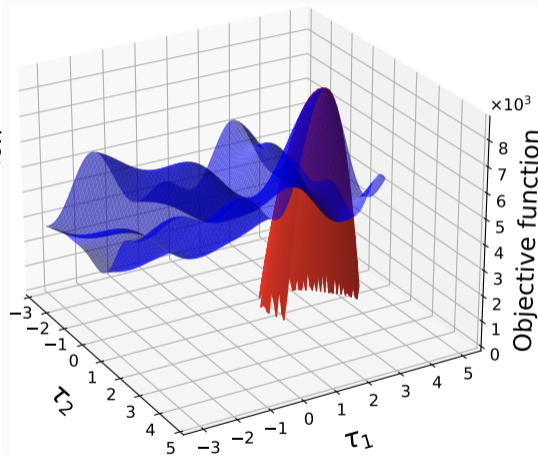
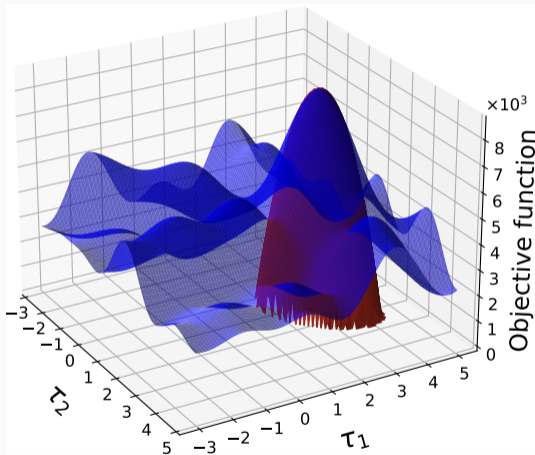




# 目的関数と補助関数の例



# 目的関数と補助関数の例



# 振幅推定の準備

- 目的関数を  $\alpha_k$  に関する二次形式に変形
  - $\tau$  を  $V_k$  に押し付ける

$$\mathbf{a}_k^H(\alpha_k, \tau) \mathbf{V}_k \mathbf{a}_k(\alpha_k, \tau) = \alpha_k^T \mathbf{V}'_k(\tau) \alpha_k, \quad (27)$$

$$\mathbf{V}'_k(\tau) = \mathbf{V}_k \odot \mathbf{P}_k(\tau) \quad (28)$$

$$\mathbf{P}_k(\tau) = \mathbf{p}_k(\tau) \mathbf{p}_k^H(\tau), \quad (29)$$

$$\mathbf{p}_k(\tau) = [e^{j\omega_k \tau_{r1}} \dots e^{j\omega_k \tau_{rM}}]^T, \quad (30)$$

- 各行列の性質
  - $\mathbf{P}_k(\tau)$  はランク 1 の半正定値行列
  - $\mathbf{V}'_k(\tau)$  はエルミートかつ半正定値行列 (*Schur product theorem*)
  - $\mathbf{V}'_k(\tau)$  と  $\mathbf{V}_k(\tau)$  のランクは同じ

# 振幅推定のアプローチ

- 目的関数  $\mathcal{J}_k(\boldsymbol{\alpha}_k)$  について，最適化問題は ( $\tau$ は fixed)
  - 制約条件として  $|\boldsymbol{\alpha}_k|^2 = 1$  を考え，最後に  $a_{rk} = 1$  となるように補正

$$\boldsymbol{\alpha}_k = \arg \max_{\boldsymbol{\alpha}_k} \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K/2} \beta_k \mathcal{J}_k(\boldsymbol{\alpha}_k) \quad \text{s.t.} \quad |\boldsymbol{\alpha}_k|^2 = 1, \boldsymbol{\alpha}_k \geq 0 \quad \forall k \quad (31)$$

$$\mathcal{J}_k(\boldsymbol{\alpha}_k) = \frac{\boldsymbol{\alpha}_k^\top \mathbf{V}'_k(\tau) \boldsymbol{\alpha}_k}{\boldsymbol{\alpha}_k^\top \boldsymbol{\alpha}_k} = \frac{\boldsymbol{\alpha}_k^\top \Re[\mathbf{V}'_k(\tau)] \boldsymbol{\alpha}_k}{\boldsymbol{\alpha}_k^\top \boldsymbol{\alpha}_k}, \quad (32)$$

- 非負制約下でのレイリー商 (Rayleigh quotient) の最大化
- 非負制約がなければ， $\mathbf{V}'_k$  の最大固有値に対応する固有ベクトルが解
- 補助関数を用いてレイリー商を最大化

# レイリー商に対する補助関数と更新則

- $Q_k^a(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\theta})$  は  $\mathcal{J}_k(\boldsymbol{\alpha}_k)$  に対する補助関数である [K. Lange, 2016]

$$Q_k^a(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\theta}) = 2\boldsymbol{\theta}_k^\top \mathbf{V}'_k \boldsymbol{\alpha}_k - \boldsymbol{\theta}_k^\top \mathbf{V}'_k \boldsymbol{\theta}_k \quad (33)$$

–  $\boldsymbol{\theta} = [\boldsymbol{\theta}_0, \dots, \boldsymbol{\theta}_{K/2}]^\top$  は補助変数,  $\boldsymbol{\theta}_k = \boldsymbol{\alpha}_k$  のとき等号成立

- 更新則

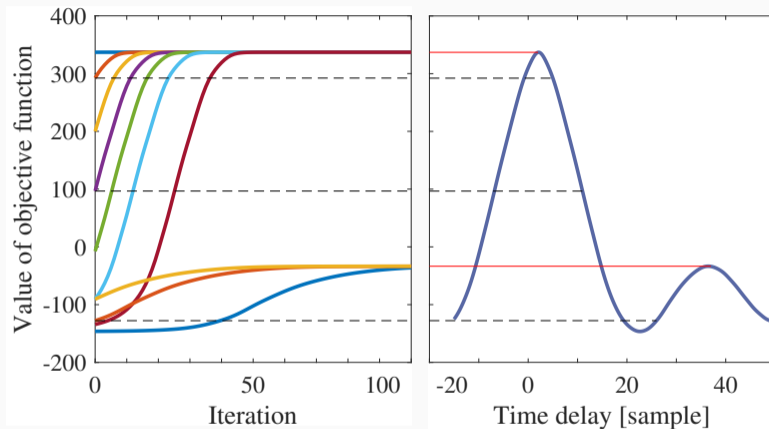
$$\boldsymbol{\alpha}_k^{(\ell+1)} \leftarrow \mathbf{V}'_k \boldsymbol{\alpha}_k^{(\ell)} \quad (34)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_k^{(\ell+1)} \leftarrow \max(\boldsymbol{\alpha}_k^{(\ell+1)}, 0) \quad (35)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_k^{(\ell+1)} \leftarrow \boldsymbol{\alpha}_k^{(\ell+1)} / \|\boldsymbol{\alpha}_k^{(\ell+1)}\|^2 \quad (36)$$

– (35) を除けば, べき乗法 (*power method/iteration*) に一致

# 分析 1: 目的関数の単調増加の確認



- 補助関数法の利点の1つである目的関数の単調増加が確認できる

## 参考: クラメール・ラオの下界

---

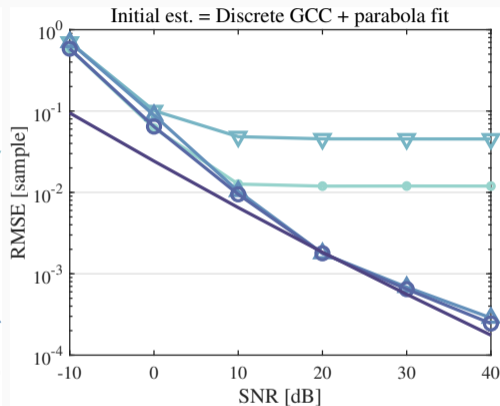
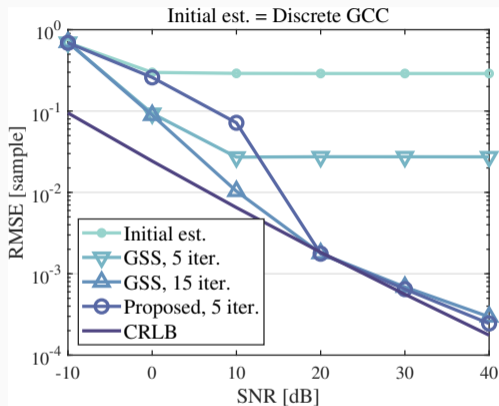
- フィッシャー情報量行列 (Fisher information matrix; FIM): 観測  $\mathbf{x}$ , パラメータ  $\boldsymbol{\theta}$ , 尤度関数  $\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})$  について, FIM は

$$[\mathcal{I}(\boldsymbol{\theta})]_{ij} = \mathbb{E} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta_i} \log \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial \theta_j} \log \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}) \right]$$

- クラメール・ラオの下界 (Cramér–Rao lower bound; CRLB): 任意の不偏推定量  $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = T(\mathbf{x})$  に対する共分散行列  $\text{cov}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})$  について, その下界は以下で与えられる [L. L. Scharf, 1991], [S. M. Kay, 1993]

$$\text{cov}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) \geq \mathcal{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta})$$

# 分析2: 性能限界との比較



- 提案法は5回の更新でCRLBに迫る性能を達成



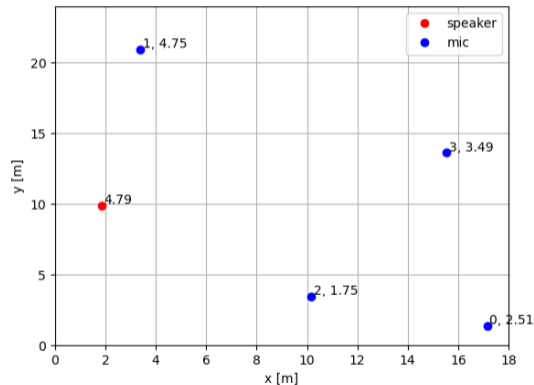
# 実験

---

- 分散アレイを想定し，提案法による時間差推定の精度を評価
  - 目的: 複数時間差の同時推定の有効性を示す
  - マイクとスピーカの配置をランダムに変えて，120通りの環境で，各マイクをリファレンスとした場合の推定精度の平均を示す
- 実験条件
  - 目的信号: 乱数
  - マイク数: 4, 8 個（簡単のため，同期した分散アレイを想定）
  - 時間差: pyroomacoustics [R. Scheibler, 2015] により，インパルス応答をシミュレート（残響時間: 200 ms 程度）
  - 雑音: 各チャンネルそれぞれに白色雑音を加算 (SNR: 10 dB)
  - サンプリング周波数: 16kHz

# 実験環境

- 3種類の部屋,  
3種類のマイク配置で実験
  - 部屋サイズ:  
[3, 4, 3] (small),  
[6, 8, 4] (meddle),  
[18, 24, 6] (large)
  - マイク: 4 (分散), 8 (分散),  
8 (アレイ)



# 推定精度 (1/3)

Table 1: 120 回の実験に対する平均平方二乗誤差 (RMSE)

	4 (small)	4 (middle)	4 (large)
離散の相互相関関数の最大化	0.253	0.253	0.252
二次関数補間	0.0742	0.0784	0.0767
提案法 (pairwise)	0.0117	0.0276	0.0270
提案法 ( $\tau$ only)	0.00894	<b>0.0171</b>	<b>0.0186</b>
提案法 ( $\tau$ and $\mathbf{a}$ )	0.00961	0.0226	0.0238
提案法 ( $\tau$ and mean( $\mathbf{a}$ ))	<b>0.00877</b>	0.0174	0.0193

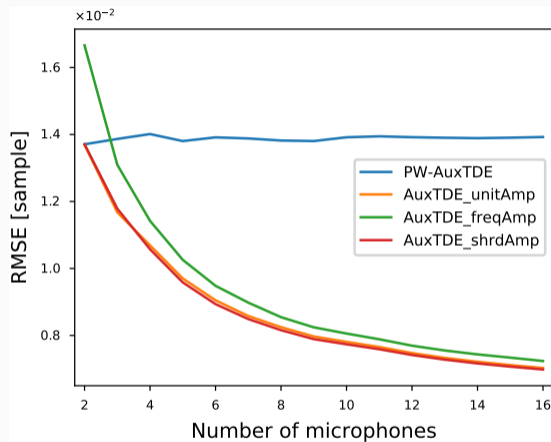
# 推定精度 (2/3)

Table 2: 120 回の実験に対する平均平方二乗誤差 (RMSE)

	4 (small)	8 (small)	8 (array, small)
離散の相互相関関数の最大化	0.253	0.270	0.270
二次関数補間	0.0742	0.0789	0.0801
提案法 (pairwise)	0.0117	0.0125	0.0212
提案法 ( $\tau$ only)	0.00894	<b>0.00729</b>	<b>0.0134</b>
提案法 ( $\tau$ and $\mathbf{a}$ )	0.00961	0.00774	0.0144
提案法 ( $\tau$ and mean( $\mathbf{a}$ ))	<b>0.00877</b>	0.00731	0.0134

# 推定精度 (3/3)

- PW-AuxTDE
  - $M C_2$  個の時間差をそれぞれ推定  
→ マイク数増加の恩恵がほぼない
- AuxTDE\*:
  - 全ての時間差を同時推定  
→ マイク数の増加に伴い性能改善



終わりに

---

# 時間差推定の意義と応用

---

- 時間差自体を推定したい場面があるか
  - あまりなさそう
- 学術的・工学的意義
  - 信号の位置情報を利用可能とする
    - 音源定位 [R. Scheibler+, 2021], [M. Togami+, 2021]
  - 信号を同期したい場面で役立つ
    - ATF 推定, サンプリング周波数ミスマッチ推定 [Y. Masuyama+, 2022]
  - 時間差推定はセンサアレイ信号処理全体のタスク
    - 音（マイク）以外のセンサでも利用可能な手法

# 応用例: マイクアレイの自己回転角度推定

- アレイ信号処理の多くは線形時不変システムを仮定
  - 伝達系が変化した場合には，フィルタ等の再設計が必要
  - VR ゴーグルなど，アレイ（頭部）が回転するような応用には課題が残る
- 円状マイクアレイ上の音場補間 [Y. Wakabayashi+, 2023]
  - 円状マイクアレイが  $\theta$  回転した時の観測信号  $x_{kn}$  は，基準位置の観測ベクトル  $x_{kn}^{(0)}$  を用いて以下で表される

$$\mathbf{x}_{kn,\theta} = \mathbf{U}(\theta)\mathbf{x}_{kn}^{(0)}$$

- $\mathbf{U}(\theta)$ : 回転行列
- ▶ 逆に，音場の情報を手がかりに基準位置からどの程度回転したか推定可能



# 本日の講義内容のまとめ

---

1. 多チャネル音響信号処理における物理モデル
    - 平面波到来モデル，線形時不変システム，相対伝達関数
  2. 相互相関関数に基づく時間差推定法
    - 理想伝搬モデル，最尤推定，サブサンプル時間差推定
  3. 補助関数法に基づく時間差推定法
    - 余弦関数に対する補助関数，多次元相互相関関数，応用例
- 説明しなかったこと
    - それぞれの物理モデルの妥当性は？
    - 残響を考慮した場合や音源が複数ある場合はどうする？
    - 推定精度はどこまで改善できる？ また，これ以上改善する意義は？
    - 信号推定や他のパラメータ推定との関係・連携は？